

UEBER

DIE GEODÄTISCHE LINIE DER MANNIGFALTIGKEIT

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2 + dz^2.$$

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

SCHUYLER COLFAX DAVISSON

AUS BLOOMINGTON IND. U.S.A.

TÜBINGEN, 1900

DRUCK VON H. LAUPP JR.

UEBER

DIE GEODÄTISCHE LINIE DER MANNIGFALTIGKEIT

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2 + dz^2.$$

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

SCHUYLER COLFAX DAVISSON

AUS BLOOMINGTON IND. U.S.A.



TÜBINGEN, 1900

DRUCK VON H. LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen

den 8. März 1900.

I n h a l t.

	Seite
Einleitung	5
§ 1. Gleichungen der geodätischen Linie	7
§ 2. Bedeutung der Constanten	8
§ 3. Geodätische Flächen	9
§ 4. Einführung von neuen Coordinaten	11
§ 5. Das Gebiet der geodätischen Linie und Verlauf dieser Linie	14
§ 6. Die geodätische Linie als geodätische Linie eines Raumes, der in einer ebenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten ist	18

Einleitung.

Vom Standpunkt der Lie'schen Transformations-Theorie aus haben bekanntlich diejenigen Flächen ein besonderes Interesse, die eine Gruppe von Bewegungen in sich zulassen: die auf Rotationsflächen abwickelbaren und diejenigen, die constantes Krümmungsmass besitzen.

Ebenso erhebt sich für Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen die Frage nach der Form des Quadrats des Linienelements ds , wenn gewisse Gruppen von Bewegungen gestattet sind. Mit dieser Frage hat sich Herr Bianchi in seiner schönen Abhandlung: *Spazi a tre dimensioni che amettono un gruppo continuo di movimenti* beschäftigt, wo man von diesem Standpunkt aus die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten classificiert findet.

Er zeigte unter anderen, dass für diejenigen Räume, welche eine intransitive Gruppe G_3 von Bewegungen zulassen, ds^2 eine der drei Formen annimmt:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) \varphi^2(x) + dz^2$$

$$ds^2 = (dx^2 + \sin^2 x dy^2) \varphi^2(x) + dz^2$$

$$ds^2 = (dx^2 + e^{2x} dy^2) \varphi^2(x) + dz^2.$$

Für den speziellen Fall $\varphi(x) = 1$ geht das erste Linienelement in das des gewöhnlichen ebenen Raumes über, die letztern beiden in die von Räumen, die je eine transitive Gruppe G_4 zulassen. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der einen dieser letzteren Mannigfaltigkeiten, nämlich mit der dreifachen Mannigfaltigkeit, die durch das Linienelement

$$(A) \quad ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2 + dz^2$$

dargestellt ist, und die nach Bianchi die folgende Gruppe G_4 von Bewegungen gestattet:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad X_2 f = \cos y \frac{\partial f}{\partial x} - \cot x \sin y \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_3 f = \sin y \frac{\partial f}{\partial x} + \cot x \cos y \frac{\partial f}{\partial y}; \quad X_4 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

die also die folgenden vier infinitesimalen Transformationen zulassen

$$\begin{array}{lll}
 1) \ x' = x & y' = y + \delta t & z' = z \\
 2) \ x' = x + \cos y \delta t & y' = y - \cot x \cdot \sin y \delta t & z' = z \\
 3) \ x' = x + \sin y \delta t & y' = y + \cot x \cdot \cos y \delta t & z' = z \\
 4) \ x' = x & y' = y & z' = z + \delta t.
 \end{array}$$

Versetzt man die gegebene Mannigfaltigkeit in einen ebenen vierdimensionalen Raum (§ 6 unten), so bedeuten die ersten drei Transformationen Drehungen, die ein ∞^1 coaxiales System von Kugeln, jede in sich, überführen; die letzte eine Verschiebung, die die Kugeln in einander überführt. Also können wir sagen, dass in dieser Mannigfaltigkeit durch eine oder mehrere von diesen Bewegungen jeder Punkt an die Stelle jedes andern gebracht werden kann.

Durch eine von Herrn Banal¹⁾ angegebene Transformation kann das Linienelement (A) in das einer Mannigfaltigkeit:

$$ds^2 = f(u^2 + v^2 + w^2) \cdot (du^2 + dv^2 + dw^2),$$

die neuerdings Herr Buchholz²⁾ eingehend untersucht hat, übergeführt werden. Wir werden unten sehen (§ 4), dass hierdurch unsere Mannigfaltigkeit in ähnlicher Weise spezialisirt wird, wie wenn man die allgemeine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche durch diese ersetzt: es fallen nämlich dann vorher getrennte Flächenpunkte an jeder Stelle in unendlicher Anzahl zusammen.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem Verlauf und den Eigenschaften der geodätischen Linie unserer Mannigfaltigkeit und mit ihren Beziehungen zu den geodätischen Ebenen derselben.

1) Annali di matematica. S.II T. 24. p. 213.

2) Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Bonn 1899.

§ 1. Gleichungen der geodätischen Linie.

Wir bestimmen zunächst die geodätische Linie desjenigen Raumes, für den das Quadrat des Linienelements ist

$$1) \quad ds^2 = dx^2 + \sin^2 x \, dy^2 + dz^2.$$

Die Flächen dieses Raumes, für die x, y, z je constant sind, bilden ein dreifach orthogonales System.

Die Flächen $z = \text{const.}$ sind auf die Kugel mit dem Radius Eins abwickelbar, weil auf einer solchen Fläche, wenn x die Pol-distanz, y die geographische Länge eines Punktes auf der Kugel ist, das Quadrat des Linienelements, für $z = \text{const.}$, die obige Form annimmt. Die Flächen, für die x oder y gleich Constanten sind, sind auf die Ebene abwickelbar.

Die Differential-Gleichungen der geodätischen Linie des betrachteten Raumes findet man nach den Regeln der Variationsrechnung. Sie sind:

$$2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \sqrt{a^2 - b^2 / \sin^2 x} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{b}{\sin^2 x} \\ \frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - a^2}, \end{cases}$$

wo a und b Integrations-Constanten sind, und wo s die Länge der geodätischen Linie ist von einem gegebenen Punkt dieser Linie an gerechnet. Zunächst ergiebt die Integration, die man ausführen muss, um die Gleichungen 2) zu bekommen, drei Constanten. Erin- nert man sich aber an die Gleichung für das Quadrat des Linien- elements, so sieht man, dass zwischen diesen eine Relation besteht, und daher blos zwei von ihnen willkürlich sind. Integrieren wir noch einmal, so bekommen wir die Gleichungen der geodätischen Linie in endlicher Form, nämlich

$$3) \quad \begin{cases} \cos x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \sin a (s - s_0) \\ \tan(y - y_0) = \frac{b}{a} \tan a (s - s_0) \\ z - z_0 = (s - s_0) \sqrt{1 - a^2}, \end{cases}$$

wo y_0, z_0, s_0 Integrations-Constanten sind.

Nehmen wir einen gegebenen Punkt als Anfangspunkt der geodätischen Linie an, d. h. einen Punkt, von dem s an gerechnet wird, so sind hierdurch diese drei Constanten bestimmt. Weil die Fläche $x = \pi/2$ von jeder geodätischen Linie geschnitten wird, so rechnen wir s von einem Punkt dieser Fläche an. Dann gehört zu $x = \pi/2, s = s_0 = 0$. Nimmt man weiter an, dass in diesem Schnittpunkt $y = y_0, z = z_0$ sei, und setzt $b/a = \cos \beta$, so erhält man statt der Gleichungen 3) die folgenden:

$$4) \quad \begin{cases} \cos x = \sin \beta \sin as \\ \tan(y - y_0) = \cos \beta \tan as \\ z - z_0 = s \sqrt{1 - a^2} \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten vier willkürliche Constanten, a, β, y_0, z_0 und sind daher die allgemeinsten Gleichungen der geodätischen Linie.

§ 2. Bedeutung der Constanten a und β .

Bezeichnen wir für einen Punkt (x, y, z) mit $(ds \, dx) (ds \, dy) (ds \, dz)$ die Winkel zwischen einem Element ds der geodätischen Linie und den Tangenten des orthogonalen Kurven-Systems (die Richtungswinkel), so haben wir

$$1) \quad \begin{cases} \cos(ds \, dx) = a \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 x}} \\ \cos(ds \, dy) = \frac{a \cos \beta}{\sin^2 x} \\ \cos(ds \, dz) = \sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Also wird in dem Anfangspunkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ der geodätischen Linie:

$$\begin{cases} \cos(ds \, dx) = a \sin \beta \\ \cos(ds \, dy) = a \cos \beta \\ \cos(ds \, dz) = \sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Die Grösse a ist also der Sinus des Winkels ($ds dz$) in jedem Punkt der geodätischen Linie und kann deshalb nicht grösser als eins werden. Ferner ist in diesem Anfangspunkt $a \sin \beta$ der Cosinus des Winkels ($ds dx$). Wird a gleich plus oder minus eins, so liegt das Element ds in dem durch dx und dy bestimmten Flächenelement. In diesem Fall ist aber $z = z_0$ d. h. die geodätische Linie liegt auf jener Fläche, die auf die Kugel abwickelbar ist. In dem später besonders zu betrachtenden Fall, dass $z = z_0$ eine Kugel ist, ist β der Winkel zwischen dem Linienelement der Kugel und dem grössten Kreis $x = \pi/2$, wie man sieht, wenn man annimmt, dass $z = z_0$ eine Kugel giebt, und die Gleichung 4) mit den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie vergleicht.

§ 3. Geodätische Flächen.

Zieht man von einem gegebenen Punkt nach allen Richtungen, die orthogonal zu einer gegebenen Richtung sind, geodätische Linien, so entsteht eine „geodätische Fläche“, die man wegen ihrer Entstehung als eine „Ebene“ dieses Raumes auffassen kann. Sei (x_1, y_1, z_1) der Punkt, durch den diese geodätischen Linien gelegt werden, und sind die geodätischen Linien orthogonal zu der Richtung

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \lambda \\ \sin x \frac{dy}{ds} &= \mu \\ \frac{dz}{ds} &= \nu,\end{aligned}$$

so entsteht die Gleichung der geodätischen Fläche (Ebene) durch Elimination von a, β, s aus den Gleichungen

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda \cdot a \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 x_1}} + \mu \frac{a \cos \beta}{\sin x_1} + \nu \sqrt{1 - a^2} &= 0 \\ \cos x &= \sin \beta \sin a (s - s_1) \\ \tan (y - y_1) &= \cos \beta \tan a (s - s_1) \\ z - z_1 &= (s - s_1) \sqrt{1 - a^2}. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir als Punkt (x_1, y_1, z_1) den Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$, so nimmt die Gleichung der Ebene eine einfachere Form an. Wir erhalten dann als Gleichung der Ebene durch diesen Punkt

$$2) \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x \sin(y - y_0)}{\sqrt{\cos^2 x \cos^2(y - y_0) + \sin^2(y - y_0)}} + \\ + \frac{\nu(z - z_0)}{\arcsin \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y - y_0) + \sin^2(y - y_0)}} = 0$$

Die Gleichung einer Ebene, die noch die Punkte $(\pi/2, 0, 0)$ (x_2, y_2, z_2) , enthält, wird alsdann:

$$3) \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{F} & \frac{\sin x \sin(y - y_0)}{F} & \frac{z - z_0}{\arcsin F} \\ \frac{\cos x_2}{F_2} & \frac{\sin x_2 \sin(x_2 - y_0)}{F_2} & \frac{z_2 - z_0}{\arcsin F_2} \\ 0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $F = \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y - y_0) + \sin^2(y - y_0)}$. Vertauschen wir den Punkt $(\pi/2, 0, 0)$ mit dem Anfangspunkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ in der vorgegebenen Entwicklung der Gleichung der geodätischen Fläche (Ebene) 3), so haben wir die Gleichung einer zweiten geodätischen Fläche durch dieselben drei Punkte gelegt, aber mit dem Punkt $(\pi/2, 0, 0)$ als Anfangspunkt. Sie ist

$$4) \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{f} & \frac{\sin x \sin y}{f} & \frac{z}{\arcsin f} \\ \frac{\cos x_2}{f} & \frac{\sin x_2 \sin y_2}{f_2} & \frac{z_2}{\arcsin f_2} \\ 0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $f = \sqrt{\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 y}$. Obschon die beiden Ebenen, die den Gleichungen 3) und 4) entsprechen, jede durch die drei gegebenen Punkte $(\pi/2, 0, 0)$ $(\pi/2, y_0, z_0)$ (x_2, y_2, z_2) bestimmt ist, so zeigt doch eine einfache Ueberlegung, dass sie nicht zusammenfallen. Hierdurch unterscheidet sich der hier behandelte dreidimensionale Raum von Räumen von constanter Krümmung.

Es erhebt sich die Frage, ob die Ebenen in besonderen Fällen die Eigenschaft der Ebenen unseres Raumes behalten, dass nämlich die geodätische Linie zwischen zwei Punkten der Ebene ganz in der Ebene enthalten ist. In § 6 wird diese Frage behandelt werden.

Eliminieren wir die Constanten α und β aus den Gleichungen 4) des § 1, so haben wir

$$\sin \sqrt{s^2 - (z - z_0)^2} = \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y - y_0) + \sin^2(y - y_0)}.$$

Nehmen wir hier s als Constante an, so ist dies die Gleichung einer Kugel dieser Mannigfaltigkeit mit dem Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ als Centrum. Weil sich s in dieser Gleichung durch einen arcussinus

ausdrückt, giebt es unendlich viele verschiedene geodätische Linien zwischen den zwei Punkten $(\pi/2 y_0 z_0)$ und (x, y, z) der Mannigfaltigkeit. In § 4 findet sich eine fernere Betrachtung dieser Thatsache.

Nach Riemann's Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, finden wir als Krümmungsmass irgend eines Flächenelements dieser Mannigfaltigkeit, das durch ds und δs bestimmt ist,

$$K = \frac{\sin^2 x (dx \delta y - \delta x dy)^2}{\sin^2 x [(dx \delta y - \delta x dy)^2 + (dy \delta z - \delta y dz)^2 + (dx \delta z - \delta x dz)^2}.$$

Hieraus ist zu sehen, dass das Krümmungsmass der drei Coordinaten-Ebenen xy, yz, zx , bezüglich 1, 0, 0 ist, was auch ohne Weiteres klar ist.

§ 4. Einführung von neuen Coordinaten.

Führen wir neue Coordinaten durch die Substitution

$$1) \quad \begin{cases} u = \sin x \cos y e^z \\ v = \sin x \sin y e^z \\ w = e^z \end{cases}$$

ein, so nimmt das Quadrat des Linienelements die symmetrische Form¹⁾ an:

$$2) \quad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Die so characterisirte Mannigfaltigkeit muss wenigstens zu einem Teil, mit der früher behandelten übereinstimmen. Aus den Gleichungen 1) sieht man, dass zwar jedem reellen Wertsystem $(x y z)$ ein und nur ein solches (u, v, w) entspricht: umgekehrt aber entsprechen einem $(u v w)$ doppelt unendlich viele Systeme (x, y, z) , näm-

1) In seiner Vorlesung über die Krümmung der Flächen im Sommerhalbjahr 1899 hat Prof. Brill darauf hingewiesen, dass die Form des Quadrats des Linienelements $ds^2 = f(\Sigma x^2) \sqrt{\Sigma dx^2}$, die Dr. Buchholz in seinem Buch: Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre untersucht, dieselbe ist, die für 3 Variabele Kummer in seiner Abhandlung über atmosphärische Strahlenbrechung in Band 61 des Journals von Crelle behandelt, und hat auf die elegante Interpretation aufmerksam gemacht, welche für 3 Dimensionen die Geometrie in jenen Räumen dadurch erfährt, dass sich ihre geodätischen Linien auf die Lichtstrahlen unseres Raumes abbilden lassen, wenn dieser mit einem Medium erfüllt ist, dessen Dichte sich in concentrischen Kugelschalen nach dem Gesetz $f(\Sigma x^2)$ ändert.

lich $(x + 2n\pi, y + 2m\pi, z)$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten. Durch Einführung der uvw Coordinaten beschränken wir uns also auf denjenigen Fall einer xyz Mannigfaltigkeit, für welche die Punkte (x, y, z) und $(x + 2n\pi, y + 2m\pi, z)$ zusammenfallen.

Führen wir die Substitution 1) in die Gleichungen 4) des § 1 ein, so bekommen wir als Gleichungen der geodätischen Linie in der uvw Mannigfaltigkeit

$$3) \quad \begin{cases} u = ce^{s\sqrt{1-a^2}}(\cos y_0 \cos as - \cos \beta \sin y_0 \sin as) \\ v = ce^{s\sqrt{1-a^2}}(\sin y_0 \cos as + \cos \beta \cos y_0 \sin as) \\ w = ce^{s\sqrt{1-a^2}}\sin \beta \sin as, \end{cases}$$

wo $c = e^{z_0}$ ist. Hier zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die Constanten c und y_0 den Anfangspunkt der geodätischen Linie bestimmen und dass die Richtung derselben bloß von den Constanten a und β abhängt.

Weil die geodätische Linie in einem Punkt der Fläche (Ebene) $w = 0$ anfängt, nämlich in dem Punkt $(u = c \cdot \cos y_0, v = c \sin y_0)$, so können wir durch die lineare Transformation

$$3^a) \quad \begin{aligned} u' &= \cos y_0 \cdot u + \sin y_0 \cdot v \\ v' &= -\sin y_0 \cdot u + \cos y_0 \cdot v \\ w' &= w, \end{aligned}$$

die, wenn man u, v, w als Coordinanten eines ebenen Raumes auffasst, einer Drehung des Coordinatensystems um die w -Axe durch den Winkel y_0 entspricht, die Gleichung 3) in die Form bringen:

$$4) \quad \begin{cases} u' = ce^{\frac{s\sqrt{1-a^2}}{\cos \beta}} \cos as \\ v' = ce^{\frac{s\sqrt{1-a^2}}{\cos \beta}} \cos \beta \sin as \\ w' = ce^{\frac{s\sqrt{1-a^2}}{\sin \beta}} \sin \beta \sin as \end{cases}$$

wo nun die geodätische Linie von demjenigen Punkt $u' = c$ der u' -Axe anfängt, dem der Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ der yxz -Mannigfaltigkeit entspricht. Nach einer anderen linearen Transformation:

$$4^a) \quad \begin{aligned} u'' &= u' \\ v'' &= \cos \beta v' + \sin \beta \cdot w' \\ w'' &= \sin \beta v' - \cos \beta w' = 0, \end{aligned}$$

die einer Drehung um die u' -Axe durch den Winkel β entspricht, bekommen wir noch eine einfachere Form der Gleichungen der geodätischen Linie:

$$5) \quad \begin{cases} u'' = ce \frac{s\sqrt{1-a^2}}{\cos as} \\ v'' = ce \frac{s\sqrt{1-a^2}}{\sin as} \\ w'' = 0. \end{cases}$$

Aus dieser Form ersieht man, dass die von einem Punkt der u'' -Axe ausgehende geodätische Linie immer in der Fläche

$$6) \quad w'' = 0,$$

oder, was dasselbe ist, in der Fläche

$$6^a) \quad u \sin y_0 \sin \beta - v \cos y_0 \sin \beta + w \cos \beta = 0$$

bleibt. In der That befriedigen die Gleichungen 3) die Gleichung 6^a) identisch, und daher ist sie eine ganz allgemeine Gleichung zwischen den Coordinanten jeder geodätischen Linie. Eine Fläche, die die Gleichung 6^a) hat, nennt Buchholz eine Nullfläche. Sie ist eine geodätische Fläche (Ebene), die die Eigenschaft der Ebenen des ebenen dreidimensionalen Raumes hat, dass nämlich die geodätische Linie zwischen zwei Punkten der Ebene ganz in der Ebene enthalten ist.

Die Gleichung der geodätischen Ebene § 3, 2) erhält durch die Substitution 1) die Form

$$7) \quad \frac{\lambda w + \mu (uv_0 - vu_0) \sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{(uu_0 + vv_0)^2 (u_0^2 + v_0^2)}{u^2 + v^2 + w^2}}} + \\ + \frac{v \frac{1}{2} \log \frac{u^2 + v^2 + w^2}{u_0^2 + v_0^2} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{\arcsin \sqrt{1 - \frac{(uu_0 + vv_0)^2 (u_0^2 + v_0^2)}{u^2 + v^2 + w^2}}} = 0,$$

wo der Punkt $(u_0 v_0 z_0)$ dem Punkt $(\pi/2 y_0 z_0)$ entspricht. Setzt man noch $v_0 = 0$ und $u_0 = 1$, so nimmt die Gleichung 7) die Form an

$$\frac{\lambda w + \mu v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{v \frac{1}{2} \log (u^2 + v^2 + w^2)}{\arcsin \sqrt{\frac{w^2 + v^2}{u^2 + v^2 + w^2}}} = 0.$$

Die Gleichung einer Kugel mit dem Punkt $(u_0 v_0 0)$ als Centrum nimmt die Form an:

$$\sin \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2} \log \frac{u^2 + v^2 + w^2}{u_0^2 + v_0^2} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(uu_0 + vv_0)^2 (u_0^2 + v_0^2)}{u^2 + v^2 + w^2}},$$

oder die Form

$$\sin \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2} \log u^2 + v^2 + w^2 \right)^2} = \sqrt{\frac{v^2 + w^2}{u^2 + v^2 + w^2}},$$

wenn der Punkt $(u_0 v_0 0)$ der Punkt $(1, 0, 0)$ wird. Wegen

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 + dw^2 &= du'^2 + dv'^2 + dw'^2 = du''^2 + dv''^2 + dw''^2, \\ u^2 + v^2 + w^2 &= u'^2 + v'^2 + w'^2 = u''^2 + v''^2 + w''^2 \end{aligned}$$

ist

$$ds^2 = \frac{du'^2 + dv'^2 + dw'^2}{u'^2 + v'^2 + w'^2} = \frac{du''^2 + dv''^2 + dw''^2}{u''^2 + v''^2 + w''^2},$$

Daher bedeuten die Transformationen 3^a) 4^a) Verschiebungen der Mannigfaltigkeit in sich.

§ 5. Das Gebiet der geodätischen Linie und Verlauf dieser Linie.

In dem vorigen § haben wir gesehen, dass die geodätischen Linien, für die y_0 und β dieselben Werte haben, in einer Fläche liegen, die die Gleichung

$$w'' = u \sin y_0 \sin \beta - v \cos y_0 \sin \beta + w \cos \beta = 0$$

hat.

Eliminieren wir s aus den Gleichungen 5) des vorigen §, so bekommen wir die Gleichung einer einzelnen von den geodätischen Linien in der Ebene

$$w'' = 0;$$

sie lautet:

$$1) \quad \frac{u''}{\sqrt{u''^2 + v''^2}} = \cos \left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{2} \log \left(\frac{u''^2 + v''^2}{c^2} \right) \right).$$

Man kann diese Gleichung in die Form bringen

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v''^2}{u''^2}}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{2} \log(u''^2 + v''^2) - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log c$$

oder in die folgende:

$$2) \quad q = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} p - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log c,$$

wenn man

$$3) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2} \log(u''^2 + v''^2) \\ q = \arctan \frac{v''}{u''} \end{cases}$$

setzt. Also nimmt das Quadrat des Linien-Elements, das für $w'' = 0$ wird

$$ds^2 = \frac{du''^2 + dv''^2}{u''^2 + v''^2},$$

die Form:

$$ds^2 = dp^2 + dq^2$$

an. Daher ist die Fläche $w''=0$ eine Fläche vom Krümmungsmass Null.

Die geodätischen Linien der pq -Ebene sind ihre Geraden, dargestellt durch die Gleichung 2). Lösen wir die Gleichung 3) nach u'' und v'' auf, so erhalten wir:

$$5) \quad \begin{cases} u'' = e^p \cos q \\ v'' = e^p \sin q. \end{cases}$$

Die Gleichungen 3) und 5) vermitteln eine Abbildung der Fläche $w''=0$ mit den Coordinaten $u'' v''$ auf die pq -Ebene. Man ersieht daraus folgendes: alle Punkte, die zu positiven u'' gehören, liegen in der Abbildung zwischen parallelen geraden Linien, die die Gleichungen

$$q = (4n - 1)\pi/2 \text{ und } q = (4n + 1)\pi/2$$

haben: alle die zu positiven v'' gehören, zwischen

$$q = 2n\pi \text{ und } q = (2n + 1)\pi.$$

Ebenso liegen alle, für die u'' negativ ist, zwischen Linien, die die Gleichungen

$$q = (4n + 1)\pi/2 \text{ und } q = (4n + 3)\pi/2$$

haben: Punkte, für die v'' negativ ist, zwischen

$$q = (2n + 1)\pi \text{ und } q = (2n + 2)\pi,$$

wo immer n eine ganze Zahl bedeutet. Die Punkte $(+u'', +v'')$ also liegen zwischen den Linien

$$q = 4n \cdot \pi/2 \text{ und } q = (4n + 1) \pi/2$$

$(+u'', -v'')$ zwischen

$$q = (4n + 1) \pi/2 \text{ und } q = (4n + 2) \pi/2$$

$(-u'', -v'')$ zwischen

$$q = (4n + 2) \pi/2 \text{ und } q = (4n + 3) \pi/2$$

$(-u'', +v'')$ zwischen

$$q = (4n + 3) \pi/2 \text{ und } q = (4n + 4) \pi/2.$$

Also gehören zu einem gegebenen Punkt der $u'' v''$ -Ebene unendlich viele Punkte der pq -Ebene, die durch eine Aufrollung der pq -Ebene auf einen Kreiscylinder mit dem Radius Eins auf einander gebracht werden können. Die Gestalt aller Kurven, für die u'' constant ist, ist dieselbe, weil durch eine Verschiebung in der Richtung der p -Axe jede Kurve in eine andere übergeht.

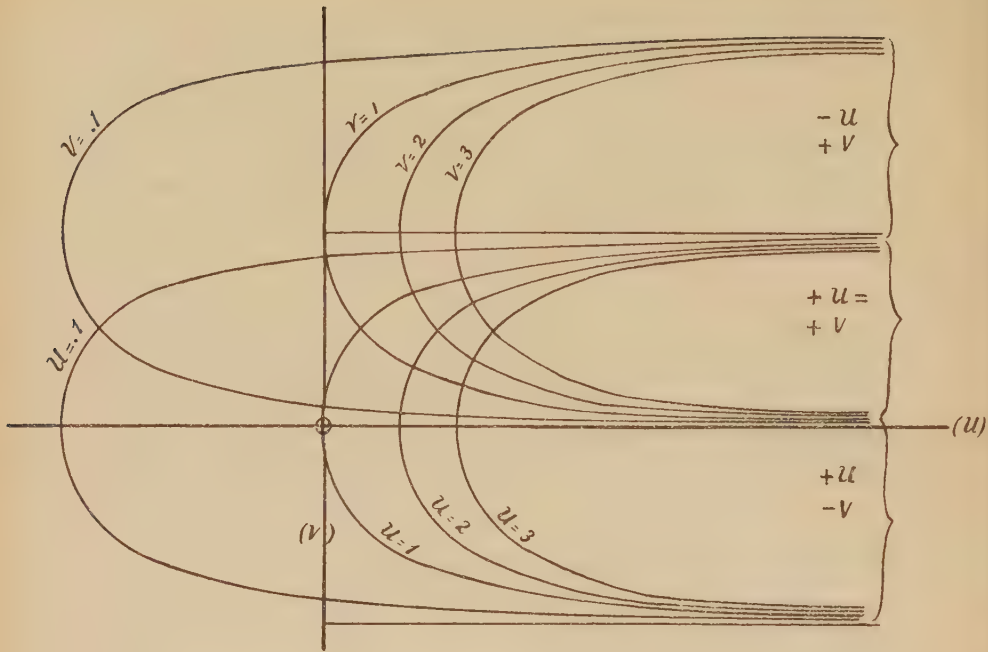


Fig. 1.

Auch sieht man aus der Gleichung 5), dass durch eine Verschiebung der u'' -Kurven in der Richtung der q -Achse um die Länge $(2n+1)\pi/2$ die entsprechenden v'' -Kurven entstehen, d. h. die Kurve $u'' = x$ in die Kurve $v'' = x$ übergeht. In der Abbildung stehen die u'' und v'' Kurven orthogonal, wie die Form des Quadrates des Linienelements lehrt. Deuten wir aber umgekehrt $u'' v''$ als rechtwinklige und geradlinige Koordinaten, und bilden wir die pq -Ebene auf der $u'' v''$ -Ebene ab, so gehen die zu der q -Achse parallel laufenden Linien in Kreise mit dem Punkt $(0,0)$ als Centrum über, die Linien parallel der p -Achse in gerade Linien durch den Nullpunkt über. Den geraden Linien der pq -Ebene aber, die von einem Punkt $(0c)$ der q -Achse ausgehen, entsprechen mit zwei Ausnahmen Spirallinien, die von einem Punkt der u'' -Achse auslaufen.

Die zwei Ausnahmen sind die zwei Fälle, wo die gerade Linie parallel der p -Achse ist, oder mit der q -Achse zusammenfällt. Den Spiral-Linien entspricht

$$-1 < a < 1 \quad a \neq 0$$

und den beiden andern Fällen bezüglich

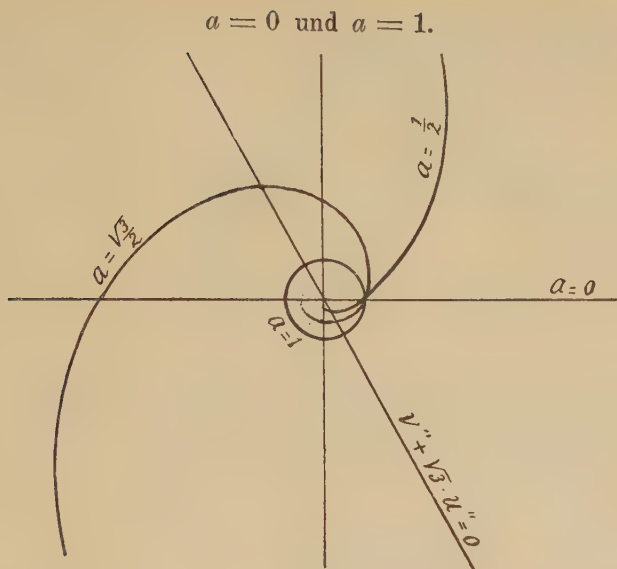


Fig. 2.

Dem Wert $a = 0$ entspricht $v'' = 0$ und dem $a = 1$

$$u''^2 + v''^2 = c^2.$$

Die begleitende Figur zeigt den Verlauf der geodätischen Linie in den vier Fällen, wo

$$a = 0 \quad a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a = 1 \text{ ist.}$$

Verlängern wir die Spiral-Linien vom Punkte $(c, 0)$ aus nach beiden Richtungen, so gelangen wir in einer Richtung nach unendlich vielen Windungen in den Punkt $(0, 0)$, und in der anderen Richtung in den Punkt $(\infty, 0)$. Nach der in der Fussnote zu Seite (§ 4) gemachten Bemerkung gibt die Figur zugleich den Verlauf eines Lichtstrahls, der im Euklidischen Raum von dem Punkt $(c, 0)$ aus durch ein Medium sich fortpflanzt, dessen Dichte nach dem Gesetz

$$\frac{\text{const.}}{r}$$

von dem Punkt $(0, 0)$ aus stetig abnimmt. Wenn wir die Abbildung bei Seite lassen und den Verlauf der geodätischen Linie analytisch untersuchen, so bekommen wir aus der Gleichung 5) des § 4

$$6) \quad \frac{dv''}{du''} = \frac{v'' \sqrt{1 - a^2} + au''}{u'' \sqrt{1 - a^2} - av''}$$

eine Gleichung, die an jeder Stelle die Richtung der in der Ebene $w'' = 0$

liegenden geodätischen Linie gibt. In dem Punkt $(c, 0)$, den wir als Anfangspunkt benutzt haben, ist

$$\frac{dv''}{du''} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Für die geodätische Linie, die von diesem Punkt zu dem Punkt (u'', v'') geht, haben wir aus der Gleichung 1) die Bedingung:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\arccos \frac{u''}{\sqrt{u''^2 + v''^2}}}{\frac{1}{2} \log \frac{u''^2 + v''^2}{c^2}}.$$

Weil arcuscosinus eine vieldeutige Funktion ist, gibt es im allgemeinen unendlich viele reelle geodätische Linien zwischen zwei Punkten der behandelten Mannigfaltigkeit. Nur

$$a = \pm 1 \text{ und } a = 0$$

machen Ausnahmen.

1) Für $a = \pm 1$ erhält man

$$\log \frac{u''^2 + v''^2}{c^2} = 1$$

oder

$$\frac{u''^2 + v''^2}{c^2} = e^{2k\pi i}$$

also bloss eine reelle geodätische Linie, die dem Wert $k=0$ entspricht. In der That kehren die durch $a = +1$ definierten Linien in sich selbst zurück.

2) Für $a = 0$ hat man aus Gleichung 1)

$$\frac{u''^2}{\sqrt{u''^2 + v''^2}} = 1$$

oder $v'' = 0$, und die geodätische Linie fällt mit der u'' -Axe zusammen. Die beiden Verfahren lassen daher vermuten, dass die geodätische Linie der $u''v''$ -Ebene und damit überhaupt alle geodätischen Linien in dieser Mannigfaltigkeit ähnlich wie die Schraubenlinien auf einem Kreiscylinder in einer ebenen 3-fachen Mannigfaltigkeit verlaufen. Dass dies der Fall ist, wird im nächsten § bewiesen.

§ 6. Die geodätische Linie als geodätische Linie eines Raumes, der in einer ebenen 4dimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten ist.

Der durch die Gleichung 1) des § 1 charakterisierte Raum

kann, wenn auch nicht in seiner ganzen Ausdehnung, ohne Dehnung und Verkürzung in einen ebenen vier dimensional Raum, m_4 mit den rechtwinklichen Coordinaten X, Y, Z, W , dessen Linienelement also

$$1) \quad ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2$$

ist, gebracht werden, weil vermöge der Substitution

$$2) \quad \begin{cases} X = \sin x \cos y \\ Y = \sin x \sin y \\ Z = \cos x \\ W = z \end{cases}$$

die Gleichung 1) die Form:

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2 + dz^2$$

annimmt. Wegen der Gleichungen 2) kann man daher diese Mannigfaltigkeit, auf die wir uns im Folgenden beschränken, durch die Gleichungen

$$3) \quad \begin{cases} ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\ 1 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

charakterisieren.

Um die Differential-Gleichungen der geodätischen Linie aus diesen Gleichungen zu finden, hat man die Funktionen X, Y, Z, W von s so zu bestimmen, dass das Integral

$$\int ds [\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + W'^2} + \lambda (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)]$$

ein Minimum wird. Die Differential-Gleichungen lauten:

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = 2\lambda X$$

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = 2\lambda Y$$

$$\frac{d^2 Z}{ds^2} = 2\lambda Z$$

$$\frac{d^2 W}{ds^2} = 0.$$

Daher entsteht:

$$\begin{aligned} 2\lambda &= X \frac{d^2 X}{ds^2} + Y \frac{d^2 Y}{ds^2} + Z \frac{d^2 Z}{ds^2} \\ &= \left(\frac{dW}{ds} \right)^2 - 1 = -k^2, \end{aligned}$$

und also als endliche Gleichungen

$$4) \quad \begin{cases} X = A_1 \cos k s + B_1 \sin k s \\ Y = A_2 \cos k s + B_2 \sin k s \\ Z = A_3 \cos k s + B_3 \sin k s \\ W = s \sqrt{1 - k^2} + c_1, \end{cases}$$

wo vermöge der Gleichungen 3)

$$\Sigma A^2 = \Sigma B^2 = 1 \quad \Sigma AB = 0$$

ist. Nehmen wir als Anfangspunkt noch den Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ dann werden die Gleichungen 4)

$$X = \cos y_0 \cos ks - \sin \alpha \sin y_0 \sin ks$$

$$Y = \sin y_0 \cos ks + \sin \alpha \cos y_0 \sin ks$$

$$Z = \cos \alpha \sin ks$$

$$W = ce^{s\sqrt{1-a^2}}$$

wo $c = e^{x_0}$ und $B_3 = \cos \alpha$.

Nach zwei aufeinander folgenden linearen Transformationen, erstens einer Drehung um die ZW -Axe durch den Winkel y_0 und zweitens einer Drehung um die $X'W$ -Axe durch den Winkel α , die den zwei linearen Transformationen § 4 Seite 12 entsprechen, werden die obigen Gleichungen

$$5) \quad \begin{cases} X'' = \cos ks = x \cos y_0 + y \sin y_0 \\ Y'' = \sin ks = x \sin \alpha \sin y_0 + y \sin \alpha \cos y_0 + \cos \alpha z \\ Z'' = 0 = x \sin y_0 - y \cos y_0 + \tan \alpha z \\ W'' = s \sqrt{1-k^2} + z_0 = w. \end{cases}$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die Constanten k und α bezüglich dieselbe Rolle spielen wie a und β in dem vorigen § und durch dieselbe ersetzt werden können. Also haben wir (vgl. Gleichung 5 § 4)

$$6) \quad \begin{cases} X'' e^{w''} = c e^{s\sqrt{1-a^2}} \cos as = w'' \\ Y'' e^{w''} = c e^{s\sqrt{1-a^2}} \sin as = v'' \\ Z'' e^{w''} = 0 = w''. \end{cases}$$

Demnach entspricht der Fläche, auf der die von uns behandelte geodätische Linie der $w''v''$ -Mannigfaltigkeit liegt, nämlich $w'' = 0$, in der ebenen Mannigfaltigkeit m_4 eine Fläche, die durch die Gleichungen

$$7) \quad \begin{cases} X \sin y_0 - Y \cos y_0 + \cot \beta Z = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases}$$

aus der Mannigfaltigkeit m_4 ausgeschnitten ist. Durch den gegebenen Anfangspunkt geht eine ∞^1 Mannigfaltigkeit von Ebenen $w'' = 0$, die den verschiedenen Werten der Constanten β entsprechen, und alle von diesem Punkt ausgehenden geodätischen Linien liegen in einer dieser Ebenen $w'' = 0$. Daher liegen alle geodätischen Linien, die von dem Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ aus gezogen werden können, auf

Kreiscylindern, deren Axen orthogonal zu der xyz -Ebene, d. h. der Ebene $w'' = 0$ sind. Auf den verschiedenen Cylindern β , die durch den Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ gehen, gibt a die Richtung der geodätischen Linien an. In dieser Weise bestimmen a und β oder a und b des § 2 die Anfangsrichtung der geodätischen Linie.

Die Gestalt dieser Linie hängt also nur von der Constante a ab und kann folgende sein.

1) Für $a = \pm 1$ erhält man $W = \text{constant}$. Also liegen die Linien in einer 3-fachen ebenen Mannigfaltigkeit und sind die Schnittlinien der zwei Flächen, die die Gleichungen 7) haben, d. h. sie sind Kreise.

2) Für $a = 0$ entsteht $\frac{dW}{ds} = 1$ d. h. die Linien sind parallel der W -Axe, daher gerade Linien.

3) Für $-1 < a < 1$ $a \neq 0$ entstehen Schraubenlinien. Hierdurch findet sich das am Ende des § 5 gesagte bestätigt.

Ebenso wie im § 3 findet man als Gleichung einer geodätischen Ebene, die durch die drei Punkte $(1, 0, 0, 0)$, $(X_1 Y_1 Z_1 W_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2 W_2)$ mit dem Punkt $(1, 0, 0, 0)$, als Anfangspunkt gelegt ist:

$$8) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y Z W f(X) \\ Y_1 Z_1 W_1 f(X_1) \\ Y_2 Z_2 W_2 f(X_2) \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{array} \right. = 0$$

wo $f(X) = \frac{\sqrt{1 - X^2}}{\arcsin \sqrt{1 - X^2}}$. Um die Gleichung der zwischen den

Punkten P_1 und P_2 gezogenen geodätischen Linie zu finden, setzen wir in der Gleichung 4) t für ks . So haben wir, wenn t_i dem Punkte P_i entspricht,

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = A_1 \cos t_i + B_1 \sin t_i \\ Y_i = A_2 \cos t_i + B_2 \sin t_i \\ Z_i = A_3 \cos t_i + B_3 \sin t_i \\ W_i = t_i \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} + z_0 \\ X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 1 \\ X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j = \cos(t_i - t_j) \end{array} \right.$$

Uebrigens aber sind $X_i \dots W_i, t_i$ beliebige Grössen. Eliminieren wir nach einander $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, k z_0$ aus den Gleichungen 9), dann bekommen wir für die Linie zwischen P_1 und P_2 die folgenden Gleichungen:

$$10) \quad \begin{cases} X = \frac{X_1 \sin(t-t_2) + X_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)} \\ Y = \frac{Y_1 \sin(t-t_2) + Y_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)} \\ Z = \frac{Z \sin(t-t_2) + Z_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)} \\ W = \frac{W_1 - W_2}{t_1 - t_2} t + \frac{t_1 W_2 - t_2 W_1}{t_1 - t_2} \end{cases}$$

Liegt insbesondere der Punkt P unendlich nahe dem Punkt P_2 , d. h. ist $t = t_2 + \delta t$, so lauten die Gleichungen 10)

$$10^a) \quad \begin{cases} X = b \delta t X_1 + X_2 (1 - c \delta t) \\ Y = b \delta t Y_1 + Y_2 (1 - c \delta t) \\ Z = b \delta t Z_1 + Z_2 (1 - c \delta t) \\ W = W_2 + W_1 - W_2 g \delta t, \end{cases}$$

$$\text{wo } b = \frac{1}{\sin(t_1 - t_2)} \quad c = \cot(t_1 - t_2) \quad g = \frac{1}{t_1 - t_2}.$$

Würde nun die geodätische Linie ganz in der Ebene 8) liegen, die zwei von ihren Punkten enthält, so müssten nach der Substitution von 10^a) in 8) die Coefficienten aller Potenzen von δt identisch verschwinden. Man hat aber als Coefficienten z. B. von δt : $c W_2 f(X_2) - b W_1 f(X_1) + g(W_1 - W_2) f(X_2) + W_2(b X_1 - c X_2) f(X_2)$, ein Ausdruck, der für beliebige W_1, Y_1, X_2, W_2 identisch verschwinden müsste, was offenbar nicht der Fall ist, und so ist die Frage auf Seite 10 beantwortet. Nur in dem besondern Fall, wo $W_1 = W_2 = 0$ ist, verschwindet dieser Ausdruck für alle X_1, X_2 . Man sieht aber in diesem Fall auch ohne Rechnung, dass die geodätische Linie ganz in der Ebene enthalten ist, weil dann die Gleichungen 8) werden:

$$\begin{cases} W = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases}$$

d. h. die geodätische Ebene geht dann über in die Kugel-Fläche:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

in der selbstverständlich jede geodätische Linie des vorliegenden Raumes enthalten ist, die zwei beliebige Punkte mit ihr gemeinsam hat.

Zum Schluss sei es mir gestattet, Herrn Prof. Dr. von Brill für die Anregung zu dieser Arbeit und für die freundliche Aufmerksamkeit, welche er mir bei meinen mathematischen Studien in Tübingen geschenkt hat, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

